Lo strappo della catena

Dott. Ing. Giulio Mazzolini

Qui esaminiamo il caso dello strappo prodotto da una catena che scende libera di filare alla ferramenta cui è legata.

Per calcolare questo caso (come pure il caso dello strappo causato alla ferramenta di bordo da una barca in movimento ma legata con una cima al molo), si deve utilizzare il principio della conservazione dell'energia che dice che l'energia cinetica della catena in movimento si trasforma in energia elastica accumulata dalla catena più l'eventuale lavoro di deformazione della paratia.

Il calcolo dello strappo nel caso in cui la paratia si deformasse è praticamente impossibile da fare in quanto non si riesce a calcolare la costante elastica della paratia, ma se riteniamo che la paratia non si deformi, l'energia elastica accumulata dalla catena sara la massima teorica possibile.

Il sistema preso in esame è visibile nella figura 1, dove H è 4 metri, la parte di catena in coperta 1 metro; la catena è da 12 mm e pesa 3,8 kg/m.

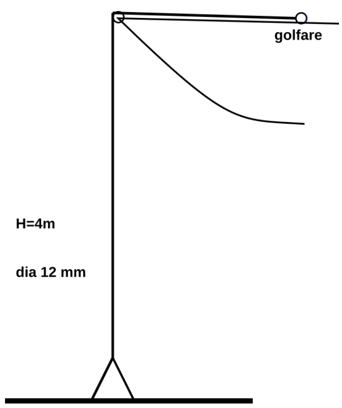

Figure 1: La caduta della catena

Il modellino fisico di questo caso è mostrato nella figura 2, dove la catena in movimento è assimilata a una automobilina di massa $5m * 3,8kg/m = 19kg$ che si muove trattenuta da una cima elastica senza massa, a sua volta legata a un punto fisso su una struttura robusta.

In questo caso la lunghezza della cima che si allunga va misurata dal baricentro del tratto di catena verticale al golfare, in quanto la forza che muove la catena è quella gravitazionale che agisce sul baricentro del tratto verticale e quindi è di 3 metri.

L'automobilina si muove con velocità costante v.

Figure 2: Lo strappo sul punto fisso

Nel caso di paratia perfettamente rigida le formule che regolano il principio della conservazione dell'energia sono:

$$Ecinetica = \frac{1}{2} * m * v^2$$

ove m è la massa del corpo in movimento e v la sua velocità, e

$$Eelastica = \frac{1}{2} * k * d^2$$

ove k è la costante di Hook della catena e d l'allungamento elastico. si ricava l'allungamento elastico

$$d = v * \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Una volta trovato l'allungamento elastico d, dalla legge di Hook troveremo lo strappo F che ci interessa con la

$$F = k * d$$

Ci serve la velocità con cui viaggia la catena, prenderemo un valore basso di 1 m/s per tener conto della frizione prodotta dal verricello sulla catena, valore che ben si approssima a valori valutabili nella pratica. [1].

Infine ci serve la costante elastica di Hook k della nostra catena.

Dalla scienza delle costruzioni il coefficiente di Hook k della catena si ricava conoscendo il Modulo di Young dell'acciaio, la sezione della catena, S e la lunghezza L che si allunga elasticamente:

$$k = M_Y * \frac{S}{L}$$

Poichè il Modulo di Young dell'acciaio è di circa $210.000 N/mm^2$ troviamo immediatamente, essendo $S = 183,4 mm^2, L = 3m$ che

$$k \approx 12,8 * 10^6 N/m$$

.

L'allungamento della catena sarà:

$$d = 1 * \sqrt{\frac{19}{12800000}} = 1,2mm$$

Noto l'allungamento troviamo subito lo strappo:

$$F = 12800000 N/m * 0.0012 m = 15360 N$$

ovvero più di una tonnellata e mezza, niente male anche se molto al di sotto del carico di rottura della catena, 90000N e inferiore anche al suo carico di lavoro, 22500N .

Va fatto notare che se la velocità fosse di 2 m/s l'allungamento raddoppierebbe e così pure lo strappo.

Per curiosità possiamo calcolare la durata dello strappo dalla teoria dell'impulsio. $m * v = F * t$ da cui $t = \frac{m*v}{F} = 1,236 millisecondi$.

Va sottolineato che questi sono valori teorici nell'ipotesi che la paratia su cui è montato il golfare sia robusto e non si deformi assorbendo energia, servono comunque a dare una idea degli sforzi in gioco.

È molto interessante prendere in considerazione il caso in cui la catena non sia legata direttamente alla struttura della barca ma tramite un elemento elastico, per esempio uno spezzone di cima.

Il calcolo del coefficiente k della cima si fa calcolando prima il coefficiente *k'* riferito a un metro di cima e poi dividendolo per la lunghezza effettiva.

Il valore di *k'* varia dal tipo si cima e da costruttore a costruttore e spesso non è dichiarato, un semplice modo per ottenerlo è di dividere il 30% del carico di rottura per il relativo allungamento.

Prendiamo per esempio uno spezzone di un metro di cima 3S di nylon ϕ 16 mm, carico a rottura 56000 N, allungamento al 30% del carico $\varepsilon \approx 12\%$.[2]

Per la nostra cima troviamo k'=$\frac{56000*0,3}{0,12}$ = 140000 N/m per 1 metro. Poiché la nostra cima ha una lunghezza 1 metro la costante elastica $k$del nostro spezzono di cima, che è $\frac{k'}{L}$, resta lo stesso.

La costante di Hook per il sistema catena + cima sarà leggermente inferiore per la presenza della catena molto rigida, circa di 138000N/m.

(Note le costanti della cima e della catena l'elasticità della catena+cima in serie può esser calcolata con la formula $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_T}$.)

A questo punto calcoliamo il nuovo allungamento e il relativo strappo.

Troviamo $d = 1 * \sqrt{\frac{19}{138000}} = 11,7mm$ e lo strappo $F = 1616N$, un valore ben dieci volte inferiore a quello con sola catena.

Il che ci dimostra l'efficacia di uno spezzone di cima per proteggere la barca.

La lezione di tutto questo è che la catena non va *mai* legata direttamente alla struttura della barca, basta un metro di cima per ridurre considerevolmente gli strappi.

Note

[1] La caduta libera di una catena che si adagia sul fondo è del tutto simile al movimento di una cascata con la differenza che l'acqua è molto fluida e non è frenata mentre la catena è frenata dal verricello.

Se non fosse frenata la velocità di caduta della catena sarebbe uguale a quella dell'acqua di una cascata e quindi sarebbe, per un dislivello di 4 metri, 8,9 m/s, un valore ben superiore a quanto utilizzato nei nostri calcoli. La velocità di caduta di una cascata si ricava dalle formule

$$v = \sqrt{2 * H * g}$$

$$t = \sqrt{\frac{(2 * H)}{g}}$$

Essendo la distanza di caduta H=4m, si ha: $t = 0,9s$ e $v = 8,9$m/s

[2]Se la cima fosse in poliestere l'allungamento sarebbe inferiore, potrebbe essere $\varepsilon \approx 7\%$.